「講座：ブラックホール降着円盤からの X 線放射」
久保田 2021, 分光研究 70, pp170-189
補助演習

久保田あや (芝浦工業大学)

ver. 20211230

ver. 20220218

理研三原さんのコメントより加筆修正

ver. 20220221

問題追加、定数追加

ver. 20220523

解答間違い修正

本演習は、「分光研究」の「講座」に寄稿した論文「ブラックホール降着円盤からの X 線放射」を用いて学部3年生と輪講した際に用いる補助教材として作成したものに基づいており、講座の1章読み終わるごとに演習を解いて理解を深めることを想定している。基本的に講座に記載した内容と、高校物理と数学の知識で解答可能である。計算に必要な諸定数を以下にまとめる。

光速 c	2.9979×10^8 m/s
万有引力定数 G	6.6743×10^{-11} Nm ² /kg ²
素電荷 e	1.6022×10^{-19} C
ボルツマン定数 k	1.3806×10^{-23} J/K
シュテファンボルツマン定数 σ	5.6704×10^{-8} W/(m ² K ⁴)
トムソン散乱断面積 σ_T	6.6525×10^{-29} m ²
プランク定数 h	6.6261×10^{-34} J·s
陽子質量 m_p	1.6726×10^{-27} kg
太陽質量 $M_\odot$	1.9891×10^{30} kg

1 はじめに

演習 1：シュバルツシルト半径 (必要な知識：万有引力、力学的エネルギー保存則)

質量 M のブラックホールのシュバルツシルト半径 r_s は、ニュートン力学のもとで、脱出速度が光速 c に達する半径、として計算することができる。

1. 力学的エネルギー保存則から、質量 M 、半径 r の天体からの脱出速度を v 、 G 、 M を用いて書き下せ。

2. 脱出速度が光速に等しくなるとしてシュバルツシルト半径 r_s が求められる。 r_s を G, M, c を用いて書き下せ。
3. 太陽を潰してブラックホールにしたとすると、そのシュバルツシルト半径は何 km か。この値はよく使うので覚えてしまうと良い。
4. 地球（質量 6.0×10^{24} kg）を潰してブラックホールにしたとすると、そのシュバルツシルト半径は何 cm か。

2 ブラックホール観測研究の始まり

演習 2：連星系（必要な知識：万有引力と等速円運動、重心）

質量 M_o の光学主星と M_x の X 線星が距離 r 離れて互いの共通重心を中心として公転周期 P で円運動しているとして以下の手順で質量関数と観測量を結びつけよう。

1. 重心から光学主星までの距離 r_o と重心から X 線星までの距離 r_x を M_o, M_x, r を用いて記述せよ。
2. 円運動の角速度を ω として光学主星と X 線星の運動方程式を M_o, M_x, r, r_o, r_x, G を用いてそれぞれ記述せよ。
3. 運動方程式を解いて公転周期 $P(= 2\pi/\omega)$ を M_x, M_o, r, G を用いて記述せよ。

4. 軌道傾斜角 i 、 r_o 、 ω を用いて、光学主星の視線速度 K を記述せよ。

5. $(M_x \sin i)^3 / (M_o + M_x)^2$ で表される連星の質量関数を P , K , G を用いて記述せよ。

3 ブラックホールと重力エネルギー

演習 3：重力と位置エネルギー（必要な知識：万有引力、力学的エネルギー、非弾性衝突）

1. 半径 r 、質量 M の天体に、無限遠から質量 m の物体を自由落下させ、天体の表面でこの物体が完全非弾性衝突をしたとする。物体が失った力学的エネルギー $\Delta(U + K)$ を求めよ。
2. 質量 m の物体の静止エネルギーは mc^2 で与えられる。質量 m の物体を無限遠から地球に自由落下させて地表で完全非弾性衝突したときに失う力学的エネルギー $\Delta(U + K)$ の静止エネルギー mc^2 に対する割合を計算せよ。地球の半径は 6400 km、質量は 6.0×10^{24} kg である。
3. 設問 2 と同様に白色矮星に自由落下させた時に失う力学的エネルギー $\Delta(U + K)$ の静止エネルギー mc^2 に対する割合を計算せよ。ただし、白色矮星は質量が太陽程度、大きさが地球程度である。
4. 設問 2 と同様に中性子星に自由落下させた時に失う力学的エネルギー $\Delta(U + K)$ の静止エネルギー mc^2 に対する割合を計算せよ。ただし中性子星の質量は $1.4M_\odot$ 、半径は 10 km とする。

演習 4：ケプラー回転と力学的エネルギー（必要な知識：万有引力、力学的エネルギー、等速円運動）

1. 質量 M の天体の周りで半径 r で等速円運動（ケプラー回転という）している質量 m の質点の速度を G, M, r を用いて記述せよ。
2. この質点の力学的エネルギーを G, M, r を用いて記述せよ。
3. 十分遠方 r_∞ で等速円運動している質点がエネルギーを失って、距離 $r_*(\ll r_\infty)$ まで落ちてきてそこで等速円運動したとすると、失った力学的エネルギーは G, M, m, r_* を用いてどのように記述できるか。

演習 5：最終安定軌道（必要なツール：gnuplot 等の plot ツール）

ブラックホールの周りでは安定にケプラー回転できる限界が存在し、最終安定軌道（last stable orbit もしくは marginal stable orbit あるいは innermost stable circular orbit）と呼ばれ、 r_{ms} もしくは r_{ISCO} で表される。非回転のブラックホール（シュバルツシルトブラックホール）では $r_{\text{ms}} = 6r_g$ であり、もっとも極端に回転したブラックホールでは同じ方向のケプラー回転に対しては $r_{\text{ms}} = r_g$ 、逆方向のケプラー回転に対しては $r_{\text{ms}} = 9r_g$ である。

1. スピンパラメータが $a_*(=0\sim 1)$ のブラックホールの周りの最終安定軌道は

$$\begin{aligned}z_1 &= 1 + (1 - a_*^2)^{1/3} \cdot ((1 + a_*)^{1/3} + ((1 - a_*)^{1/3})) \\z_2 &= \sqrt{3a_*^2 + z_1^2}\end{aligned}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}r_{\text{ms}}/r_g &= 3 + z_2 - \sqrt{(3 - z_1)(3 + z_1 + 2z_2)} \quad (\text{順方向}) \\r_{\text{ms}}/r_g &= 3 + z_2 + \sqrt{(3 - z_1)(3 + z_1 + 2z_2)} \quad (\text{逆方向})\end{aligned}$$

のように与えられる。順方向と逆方向両方の場合について、gnuplot などで横軸に a_* 、縦軸に r_{ms}/r_g を表示せよ。

2. 非回転のブラックホールに対して、十分遠方 r_∞ で等速円運動している質量 m の質点がエネルギーを失って、 r_{ms} まで落ちてきてそこで等速円運動したとする。失った力学的エネルギーを静止エネルギー mc^2 用いて表せ。

3. 設問2で、もっとも極端に回転したブラックホールで順方向に回転している場合はどのように書けるか。

4. 設問3で、逆方向に回転している場合はどのように書けるか。

演習6：光度とフラックス

- 1秒間に放射するエネルギー、すなわち光度が L である半径 R の天体があるとする。以下の問いに答えよ。
1. 天体の表面で、単位面積、単位時間に放射されるエネルギー流量（フラックス） F_* はどのようにかけるか。

 2. 天体の中心から距離 D でのこの天体からのフラックス F はどのように書けるか。

 3. フラックスは見かけの明るさ（地球から天体を見た時に明るく見えるかどうか）をはかる量であり、これは天体自体の光度と距離で決まる。ある天体までの距離は $D = 2.5 \text{ kpc}$ で $0.5\text{--}10 \text{ keV}$ のフラックスは $F = 6.6 \times 10^{-8} \text{ erg}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2)$ であった。この天体の放射が等方的であるとして、天体の光度 L を求めよ ($1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 10^7 \text{ g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2 = 10^7 \text{ erg}$)。

演習7：エディントン限界光度（必要な知識：万有引力、輻射圧、散乱断面積）

光度 L で明るく輝く質量 M の天体の周りにガス（ほぼ水素）があるときにガス中の水素原子（陽子と電子で構成）に働く力を考えてみよう。

1. ガスの位置における天体からのフラックスが F だとすると、電子は光子から輻射による力 $F\sigma_T/c$ を受ける。 $F\sigma_T/c$ を次元解析し、力の単位になっていることを確かめよ。ただし、 c は光速、 σ_T はトムソン散乱断面積である。
2. 球対称な放射を仮定して、天体の中心から距離 r でのフラックスを L, r を用いて表し、設問1の輻射による力を L を用いてかきくだせ。
3. 陽子の質量を m_p 、万有引力定数を G として、水素原子が天体から受ける万有引力を書き下せ。
4. 設問2と3が釣り合うとして、質量 M の天体のエディントン限界光度 L_{Edd} (「講座」式(5)) を導け。
5. 質量 $1.4 M_{\odot}$ の中性子星のエディントン限界光度を [W] と [erg/s] で計算せよ。
6. 質量 $10 M_{\odot}$ のブラックホールのエディントン限界光度を [W] と [erg/s] で計算せよ。
7. 恒星の中心核だけが残ったヘリウム星と中性子星が近接連星系をなしている場合、水素ガスではなく、ヘリウムガスが中性子星に降着する。この星が降着で輝ける最大光度(エディントン限界光度)を求めよ。なお、実際の降着を考える際は、水素以外の原子を考慮して、エディントン限界光度は $1.5 \times 10^{38} (M/M_{\odot})$ erg/s 程度となる。

4 high/soft 状態と光学的に厚い降着円盤

演習 8 : diskbb モデル (必要な知識 : 万有引力、力学的エネルギー、等速円運動、黒体放射、積分)

質量 M の高密度天体を中心に降着円盤が形成されているとする。ガスの運動は重力を向心力とする等速円運動すなわちケプラー回転を仮定して良いとする。以下の問いに答えよ。

1. ガス中の質量 m の質点に注目する。この質点の天体からの距離が r のとき、ケプラー回転の速さ $v(r)$ は演習 4 より $v(r) = \sqrt{GM/r^3}$ と書ける。この質点が天体の中心から距離 $r + \Delta r$ でケプラー回転している状態からガス中の摩擦によってエネルギーを失って距離 r でのケプラー回転に移ったとする。 $\Delta r \ll r$ として、この間に失った力学的エネルギー $\Delta E(r)$ を書き下せ。
2. 設問 1 で失われたガスの力学的エネルギーは熱エネルギーとして円盤のガスの温度を上昇させる。ガスは温度に応じた電磁波を放射し、冷却する。加熱と冷却のバランスで円盤の温度が決まる。ガスの密度が十分高く、黒体放射を仮定できるとする。温度 T の物体は単位面積・単位時間あたり σT^4 の放射をすることをを用いて、「講座」図 6 の幅 Δr の帯状の領域から 1 秒間に放射されるエネルギー $\Delta L(r)$ を記述せよ。帯の両側から放射されることに注意する。
3. 設問 1 で質点が $r + \Delta r$ から r まで移動するのにかかる時間を Δt とすると、 $\Delta E/\Delta t$ は設問 2 の $\Delta L(r)$ に等しくなる。また、 $m/\Delta t$ は質量降着率とみなせるので、 $m/\Delta t = \dot{M}$ とおける¹。円盤の局所温度 (距離 r における温度) $T(r)$ を $M, \dot{M}, G, \sigma, r$ を用いて書き下せ。
4. 最内縁の半径を r_{in} 、 r_{in} における温度を T_{in} として $T(r)$ を $T_{\text{in}}, r_{\text{in}}, r$ を用いて書き下せ。この温度分布で黒体放射するモデルが diskbb モデルである。

¹降着するガスは高密度星に降り積もり、高密度星の質量 M を増やすので、質量降着率は M の時間微分 $\dot{M}$ と書く。

5. σT^4 を円盤全体にわたって積分すれば降着円盤全体から単位時間あたりに放射されるエネルギー、すなわち光度 L_{diskbb} が求まる。

$$L_{\text{diskbb}} = 2 \cdot \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \sigma [T(r)]^4 \cdot 2\pi r dr$$

の積分を実行し L_{diskbb} を $r_{\text{in}}, T_{\text{in}}$ を用いて書き下せ。ただし、 $r_{\text{out}} \gg r_{\text{in}}$ とする。

6. $r = r_{\text{in}}$ から $2r_{\text{in}}$ で放射されるエネルギーは全体の何%か計算せよ。

7. $r = r_{\text{in}}$ から $10r_{\text{in}}$ で放射されるエネルギーは全体の何%か計算せよ。

8. r_{in} が最終安定軌道に一致するとして、非回転のブラックホールについて L_{diskbb} を $\dot{M}, c$ を用いて書きくだせ。

演習 9：ブラックホール質量と円盤内縁の温度（必要な知識：最終安定軌道、エディントン限界光度）

円盤の温度分布が diskbb モデルで表されるとして以下の問いに答えよ。

1. 非回転のブラックホールの降着円盤がエディントン限界光度 ($1.3 \times 10^{31} \cdot (M/M_{\odot}) W$) で輝いていると

き、内縁の温度 T_{in} を $M/M_{\odot}$ を用いて書き下せ。また、 kT_{in} を $M/M_{\odot}$ を用いて書き下せ。

2. $M = 10 M_{\odot}$ の恒星質量ブラックホールの降着円盤がエディントン限界光度で輝いているとき、内縁の温度は何 K か計算せよ。また kT_{in} は何 keV となるか。
3. $M = 10^7 M_{\odot}$ の超巨大質量ブラックホールの降着円盤がエディントン限界光度で輝いているとき、内縁の温度は何 K か計算せよ。また kT_{in} は何 eV となるか。

演習 10：標準降着円盤モデルの温度分布（必要な知識：万有引力、力学的エネルギー、黒体放射、微積分）

diskbb モデルは近似的モデルである。Shakura と Sunyaev による標準降着円盤モデルは内縁の境界条件とエネルギー輸送と角運動量輸送を正しく取り入れたモデルであり、温度分布は「講座」式 (15) のように表される。以下の問いに答えよ。

1. gnuplot 等を用いて、横軸に r/r_{in} 、縦軸に局所フラックス $\sigma T(r)^4$ を取り、diskbb モデルと標準降着円盤モデルの比較をグラフに表示せよ。縦軸は任意の単位で良いとする。
2. 式 (15) を r で r_{in} から r_{out} にわたって積分し、標準降着円盤の光度 L_{ss} を $G, M, \dot{M}, r_{\text{in}}, r_{\text{out}}$ で表せ。 $r_{\text{out}} \gg r_{\text{in}}$ で近似し、 $L_{\text{ss}} = L_{\text{diskbb}}$ であることを確認せよ。

3. 式 (15) を r で微分し、温度が最高となる半径 r_{max} を r_{in} を用いて書き下せ。

4. L_{ss} を $T_{\text{max}}, r_{\text{in}}$ で表し、これが diskbb の光度 L_{diskbb} と一致するとして、diskbb で得られた $r_{\text{in,diskbb}}$ から真の r_{in} を推定する補正係数 $\xi = 0.41$ を導出せよ。ただし、 T_{max} は diskbb で得られる T_{in} に一致するものとする。(Kubota 1998 PASJ, 50, 667 の Appendix 参照)

5. $r = r_{\text{in}}$ から $2r_{\text{in}}$ で放射されるエネルギーは全体の何%か計算せよ。diskbb の結果と比較せよ。

6. $r = r_{\text{in}}$ から $10r_{\text{in}}$ で放射されるエネルギーは全体の何%か計算せよ。diskbb の結果と比較せよ。

7. $r = r_{\text{in}}$ から $r_{\text{max}} (= (7/6)^2 r_{\text{in}})$ で放射されるエネルギーは全体の何%か計算せよ。

演習 11：観測とブラックホールのパラメータ（必要な知識：diskbb の光度、黒体放射の有効温度と色温度）

あるブラックホールからの放射が $kT_{\text{in}} = 0.9 \text{ keV}$ 、 $r_{\text{in}} = 50 \text{ km}$ の diskbb モデルでよく再現できたとする。以下の問いに答えよ。

1. 演習 4-1 の結果を用いて、この天体の光度を計算せよ。

2. 真の内縁半径 R_{in} が

$$R_{\text{in}} = \xi \kappa^2 r_{\text{in}}$$

で推定できるとして、 R_{in} を推定せよ。ここで、 ξ は diskbb と標準降着円盤の内縁条件の補正係数、 κ は有効温度と色温度の補正係数（hardening factor）で、 $\kappa = 1.5 \sim 1.9$ 程度であるがここでは $\kappa = 1.7$ とし
て計算せよ。

3. 得られた R_{in} が最終安定軌道に一致するとして、ブラックホール質量を推定せよ。ただし非回転のブラックホールを仮定する。

4. 設問 3 で得られたブラックホール質量を仮定して、設問 1 の光度がエディントン限界の何%か計算せよ。

5 硬 X 線放射と光学的に薄い高温降着流

演習 12：power-law スペクトルと逆コンプトン散乱

1. $F(E) = AE^{-\Gamma}$ で表される power-law 型のスペクトルは両対数で表示すると直線になることを示せ。

2. あるブラックホール連星の hard state のスペクトルが光子指数 $\Gamma = 1.5$ 、電子温度 $kT_e = 80$ keV の nthcomp モデル (逆コンプトン散乱を記述するモデル) でよく再現できたとき、「講座」式 (17) および (18) から光学的厚み τ と y パラメータを計算せよ。なお、以下のような script COMP を作ってしまうと 'COMP 1.5 80' ですぐに計算できる。

```
#!/bin/csh -f
set gamma = "$1"
set te = "$2"
set te = `echo $te |awk '{print $1/511}'`
set tau = `echo $te $gamma |awk '{print 9+12/($1*(($2-1)*($2-1)+3*($2-1)))}'`
set tau = `echo $tau |awk '{print ($1**0.5-3)/2}'`
set a = `echo $tau |awk '{if ($1<1) {print $1} else {print $1*$1}}'`
set y = `echo $te $a |awk '{print 4*$1*$2}'`
set gamma_r = `echo $te $tau |awk '{print (9/4+1/($1*$2*(1+$2/3)))*0.5-1.5+1}'`
echo "te=$te gamma=$gamma_r tau=$tau y=${y}"
exit
```

6 降着流と線スペクトル

演習 13：輝線のエネルギー (必要な知識：電磁波の波長とエネルギー)

- 「講座」式 (19) から鉄 (原子番号 $Z = 26$) の $\text{Ly}\alpha$ のエネルギーを計算せよ。
- 「講座」式 (21) から鉄の $\text{Ly}\alpha$ の微細構造分裂の大きさ ΔE_{2p} を計算せよ。
- NIST online https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html から Fe $\text{Ly}\alpha$ (Fe XXVI: $2p^1\ 2P_{1/2,3/2} - 1s\ 2S_{1/2}$) のエネルギーを keV で求めよ。その結果から、微細構造分裂の大きさを eV で計算せよ。

4. NIST online https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html から Fe He α (Fe XXV: $1s2p^1P_1 - 1s^2^1S_0$) のエネルギーを keV で求めよ。

演習 14：輝線の等価幅（必要な知識：積分）

輝線もしくは吸収線の連続成分に対する割合を表すのに等価幅 (equivalent width; EW) が用いられる。等価幅は中心値 E_c の輝線のフラックス (=norm) が連続成分 $f(E)$ の E_c において

$$norm = \int_{E_c - EW/2}^{E_c + EW/2} f(E) dE \simeq f(E_c) \cdot EW$$

を満たすようなエネルギーの”幅”である。スペクトルが $E_c = 6.9$ keV, $\sigma = 10$ eV, $norm = 0.005$ photons/(s · cm²) の gaussian と次式で表される光子指数 1.6 の power-law で再現できたとする。

$$f(E) = 0.5 \text{ photons}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{keV}) \left(\frac{E}{1 \text{ keV}} \right)^{-1.6}$$

power-law に対する輝線の等価幅を計算せよ²。

演習 15：観測値と円盤風のパラメータ（必要な知識： ξ パラメータ、組成比 abundance）

あるブラックホール連星の X 線スペクトルは $kT_{\text{in}} = 1.2$ keV, $r_{\text{in}} = 50$ km の diskbb でよく表され、7.0 keV と 6.7keV に吸収線構造が検出された。7.0 keV の等価幅は 30 eV で、6.7keV の等価幅は 20 eV とする。以下の問いに答えよ。

1. Kotani et al. 2000 ApJ, 539, 413(erratum Kotani et al. 2006, ApJ, 651, 615) の図 3 を参照し、Ly α と He α の柱密度 $N_{\text{Ly}\alpha}$, $N_{\text{He}\alpha}$ を推定せよ。ただし、 $kT = 10$ keV を仮定することとする。

<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2000ApJ...539..413K/abstract>

<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...651..615K/abstract>

²xspec では、例えば 'TBABS*(POWER-LAW + GAUSS)' というモデルで表された場合、XSPEC>eqw 3 で gauss の等価幅が求められるので手計算の値と一致するかどうか一度確かめておくが良い。

2. Ly α と He α の比は電離度と入射スペクトルの形で決まる。Kubota et al. 2007 PASJ, 59S, 185 の図 8 右を参照して、この円盤風の電離度 ξ パラメータを推定せよ。

<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007PASJ...59S.185K/abstract>

3. Kubota et al. 2007 の図 8 左を参照し、得られた ξ パラメータから全鉄のうちの Ly α の割合 $f_{\text{Ly}\alpha}$ を推定せよ。

4. 全吸収物質の柱密度 N_{tot} と観測された Ly α の柱密度 $N_{\text{Ly}\alpha}$ は

$$N_{\text{FeLy}\alpha} = N_{\text{tot}} \cdot A_{\text{Fe}} \cdot f_{\text{Ly}\alpha}$$

の関係を持つ。ここで A_{Fe} は鉄の組成比である。 $A_{\text{Fe}} = 3.3 \times 10^{-5}$ (太陽組成) を仮定し、 N_{tot} を推定せよ。

5. ξ パラメータは吸収物質の個数密度 n , 中心天体の光度 L , 吸収体から光源までの距離 r を用いて $\xi = L/nr^2$ と書ける。吸収体の厚み $\Delta r = r$ を仮定すると、 $N_{\text{tot}} = n\Delta r \simeq nr$ と近似できるので、 ξ は $\xi \simeq L/(N_{\text{tot}}r)$ と近似できる。設問 2 で推定した ξ と設問 4 で推定した N_{tot} , 及び diskbb のパラメータから L_{disk} を計算し、円盤風の launching radius r を推定せよ。また $7M_{\odot}$ のブラックホールを仮定すると、launching radius はシュバルツシルト半径の何倍となるか。

略解

演習 1 : 1. $\sqrt{\frac{2GM}{r}}$ 2. $\frac{2GM}{c^2}$ 3. 3.0 km 4. 0.89 cm

演習 2 : 1. $r_o = \frac{M_x}{M_o + M_x} r$ $r_x = \frac{M_o}{M_o + M_x} r$ 2. $M_o r_o \omega^2 = \frac{GM_o M_x}{r^2}$, $M_x r_x \omega^2 = \frac{GM_o M_x}{r^2}$
3. $2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(M_x + M_o)}}$ 4. $r_o \omega \sin i$

演習 3 : 1. $\frac{GMm}{r}$ 2. 7.0×10^{-10} 3. 2.3×10^{-4} 4. 0.21

演習 4 : 1. $\sqrt{\frac{GM}{r}}$ 2. $-\frac{GMm}{2r}$ 3. $\frac{GMm}{2r_*}$

演習 5 : 1. $\frac{1}{12} mc^2$ 2. $\frac{1}{2} mc^2$ 3. $\frac{1}{18} mc^2$

演習 6 : 1. $\frac{L}{4\pi R^2}$ 2. $\frac{L}{4\pi D^2}$ 3. 5.0×10^{37} erg/s

演習 7 : 2. $\frac{L\sigma_T}{4\pi r^2 c}$ 5. 1.8×10^{38} erg/s 6. 1.3×10^{39} erg/s

演習 8 : 1. $\frac{GMm}{2r^2} \Delta r$ 2. $4\pi\sigma T(r)^4 \Delta r$ 6. 50% 7. 90% 8. $\frac{1}{12} \dot{M} c^2$

演習 9 : 1. $2.2 \times 10^7 (M/M_\odot)^{-1/4}$ K = $1.9 (M/M_\odot)^{-1/4}$ keV

演習 10 : 3. $(7/6)^2 r_{in} = 1.36 r_{in}$ 5. 21% 6. 76% 7. 5.5%

演習 11 : 1. 2.1×10^{38} erg/s 2. 60 km 3. $6.7 M_\odot$ 4. 24%

演習 12 : 2. $\tau = 2.1$ $y = 2.8$

演習 13 : 2. 21 eV 3. 6.982 keV, 6.961 keV, 21 eV 4. 6.7096 keV

演習 14 : 1. 220eV